

ĐIỀU KIỆN CẦN HỮU HIỆU CHO NGHIỆM YẾU ĐỊA PHƯƠNG CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTO CÓ RÀNG BUỘC BẤT ĐẲNG THỨC TỔNG QUÁT VÀ ÁP DỤNG

Trần Văn Sự, Nguyễn Thanh Phong

Khoa Toán, Trường Đại học Quảng Nam

Email: vansudhdntt@gmail.com, phongspqn@gmail.com

Ngày nhận bài: 30/11/2018; ngày hoàn thành phản biện: 28/1/2019; ngày duyệt đăng: 28/1/2019

TÓM TẮT

Sử dụng khái niệm đạo hàm Studniarski trong không gian Banach, trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát. Kết quả thu được này sẽ được áp dụng trực tiếp vào bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ có chung ràng buộc bất đẳng thức tổng quát.

Từ khóa: Điều kiện cần hữu hiệu; Bài toán cân bằng vectơ; Bất đẳng thức biến phân vectơ; Bài toán tối ưu vectơ; Nghiệm hữu hiệu yếu địa phương; Đạo hàm Studniarski.

1. MỞ ĐẦU

Bài toán cân bằng vectơ là một sự mở rộng của bài toán cân bằng vô hướng do Blum và Oettli [3] thiết lập lần đầu vào năm 1994 bằng việc tổng quát hóa bài toán lý thuyết trò chơi không hợp tác kiểu Nash và bài toán bất đẳng thức biến phân kiểu vô hướng, xem, chẳng hạn Bianchi, Hadjisavvas, Schaible [4]; Ansari [5]. Hiện nay điều kiện hữu hiệu cho bài toán cân bằng vectơ và các bài toán đặc biệt của chúng bao gồm bài toán bù vectơ, bài toán điểm bất động vectơ, bài toán cân bằng Nash vectơ, bài toán điểm yên ngựa vectơ, bài toán cực tiểu hóa phiếm hàm vectơ, bài toán tối ưu vectơ và bất đẳng thức biến phân vectơ được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu (xem [1, 2, 6, 7, 8, 10] và các tài liệu tham khảo trong đó). Nhiều công cụ toán học trong giải tích không trơn, giải tích lồi và giải tích hàm được nhiều nhà nghiên cứu toán ứng dụng tận dụng triệt để nhằm mục đích thiết lập điều kiện cần, cần và đủ hữu hiệu cho các loại nghiệm của bài toán cân bằng vectơ cũng như các trường hợp đặc biệt của bài toán chẳng hạn như đạo hàm theo hướng suy rộng, đạo hàm Dini, dưới vi phân suy rộng, dưới vi phân Clarke, dưới vi phân Michel-penot, dưới vi phân Mordukhovich, v.v., xem, chẳng hạn Gong [1]; Long, Huang và Peng [2], Luu [7]; Su và Phong [10].

Điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc bất đẳng thức...

Đạo hàm Studniarski cấp cao được đề xuất bởi chính Studniarski [6] vào năm 1986 và sau đó tác giả đã áp dụng công cụ này để thiết lập các điều kiện cần và đủ hữu hiệu cấp một và cấp cao cho cực tiểu chặt địa phương với các hàm không trơn trong các bài toán tối ưu hóa vectơ và bất đẳng thức biến phân vectơ, xem, chẳng hạn Studniarski [6]; Luu [7]; Giorgi và Guerraggio [8]. Trong lớp bài toán cân bằng vectơ tổng quát, các loại nghiệm hữu hiệu yếu bao gồm cả nghiệm hữu hiệu yếu địa phương được xây dựng và nghiên cứu đầu tiên bởi Gong [1] và sau đó chúng được áp dụng để định nghĩa trở lại cho bài toán tối ưu vectơ và bất đẳng thức biến phân vectơ bởi một số tác giả khác khi làm việc với các trường hợp riêng của bài toán cân bằng vectơ, xem, chẳng hạn Long, Huang, Peng [2]. Chúng tôi nhận thấy rằng các điều kiện cần hữu hiệu cho các loại nghiệm của bài toán cân bằng vectơ tổng quát theo ngôn ngữ của đạo hàm Studniarski với lớp hàm không trơn là chưa được nghiên cứu trong không gian vô hạn chiều cũng như một số áp dụng của chúng.

Mục đích của chúng tôi trong bài báo này là sử dụng khái niệm đạo hàm Studniarski để mô tả các điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát và một số áp dụng của chúng. Kết quả thu được của chúng tôi là mới và chưa từng được nghiên cứu trước đây và trong tương lai chúng có thể được áp dụng để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán cân bằng tham số và xây dựng các thuật toán số cho bài toán cân bằng vectơ nói chung và bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát nói riêng bởi các nhà nghiên cứu thuật toán.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho X , Y và Z là các không gian Banach thực và C là một tập khác rỗng của X , trong đó Y và Z được sắp thứ tự bởi các nón lồi đóng và có phần trong khác rỗng Q và S tương ứng. Phần trong và bao đóng của một tập con A trong X được ký hiệu tương ứng bởi $\text{int}A$ và $\text{cl}A$. Không gian đối ngẫu tôpô của Y và Z theo thứ tự được ký hiệu bởi Y^* và Z^* , và các nón đối ngẫu của Q và S được định nghĩa tương ứng như sau:

$$Q^+ = \{\xi \in Y^* : \langle \xi, q \rangle \geq 0 \quad \forall q \in Q\}$$

và

$$S^+ = \{\eta \in Z^* : \langle \eta, s \rangle \geq 0 \quad \forall s \in S\}.$$

Chú ý rằng các nón Q^+ và S^+ là lồi và đóng yếu*. Với mỗi $x_0 \in X$ và $\delta > 0$, hình cầu mở tâm x_0 và bán kính δ được ký hiệu bởi $B(x_0, \delta) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \delta\}$, ở đây $\|\cdot\|$ ký hiệu của chuẩn trong X .

Cho song hàm $F: X \times X \rightarrow Y$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F(\bar{x}, \bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x} \in X$, và hàm ràng buộc $g: X \rightarrow Z$. Ký hiệu bởi $K = \{x \in C : g(x) \in -S\}$. Bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát trong bài báo này được ký hiệu là (GVEP) và được định nghĩa như sau:

$$\text{Tìm } \bar{x} \in K \text{ sao cho } F(\bar{x}, x) \notin -\text{int } Q \quad (\forall x \in K). \quad (1)$$

Định nghĩa 2.1 ([1,2]) Vectơ $\bar{x} \in K$ thỏa mãn (1) được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (GVEP) và tập K được gọi là chấp nhận được của bài toán (GVEP).

Định nghĩa 2.2 ([1,2]) Vectơ $\bar{x} \in K$ được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (GVEP) nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho (1) đúng với mọi $x \in K \cap B(\bar{x}, \delta)$.

Như vậy, nếu $\bar{x} \in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (GVEP) thì $\bar{x} \in K$ cũng là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (GVEP). Do đó, các kết quả nghiên cứu về điều kiện cần hữu hiệu nếu đúng cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương thì cũng đúng cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (GVEP).

Bây giờ chúng tôi giới thiệu hai trường hợp đặc biệt của bài toán (GVEP) là bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVOP) và bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVVI), và chúng được mô tả lại trong bài báo này ở dạng sau.

Định nghĩa 2.3 ([1, 2]) Cho trước một ánh xạ $f: K \rightarrow Y$. Nếu song hàm $F(x, y) := f(y) - f(x) \quad \forall x, y \in K$ và nếu $x \in K$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVEP) thì $x \in K$ được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVOP). Trong trường hợp này ta gọi K là tập chấp nhận được của bài toán (GVOP).

Ký hiệu $L(X, Y)$ là không gian các ánh xạ tuyến tính bị chặn từ X vào Y . Cho trước một ánh xạ $T: K \rightarrow L(X, Y)$, khi đó với mỗi $x \in K$, Tx là một ánh xạ tuyến tính bị chặn từ X vào Y . Ta có khái niệm sau.

Định nghĩa 2.4 ([1, 2]) Nếu $F(x, y) := \langle Tx, y - x \rangle \quad \forall x, y \in K$ và nếu $x \in K$ là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVEP) thì $x \in K$ được gọi là nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán bất đẳng thức biến phân có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVVI). Trong trường hợp này ta gọi K là tập chấp nhận được của bài toán (GVVI).

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu khái niệm quan trọng cần sử dụng trong chứng minh các kết quả mới của bài báo về đạo hàm Studniarski (xem [6, 7]) và chúng được phát biểu như sau:

Điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm yếu địa phương của bài toán cân bằng vector có ràng buộc bất đẳng thức...

Định nghĩa 2.5 ([6]) Cho ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và các điểm $\bar{x}, v \in X$, $m \geq 1$ ($m \in \mathbb{N}$). Đạo hàm Studniarski cấp m của f tại điểm $(\bar{x}, v)$ được ký hiệu $d_S^m f(\bar{x}; v)$ và được xác định bởi

$$d_S^m f(\bar{x}; v) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ u \rightarrow v}} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t^m}$$

nếu giới hạn tồn tại. Trong trường hợp $m = 1$, ta viết $d_S f(\bar{x}; v)$ thay cho $d_S^1 f(\bar{x}; v)$. Các nón tiếp liên sau là cần thiết trong việc thiết lập điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (GVEP) và các trường hợp riêng.

Định nghĩa 2.6 ([8]) Nón tiếp liên của tập $A \subset X$ tại điểm $\bar{x} \in clA$ được định nghĩa bởi

$$T(A, \bar{x}) = \left\{ v \in X : \exists t_n \rightarrow 0+, \exists v_n \rightarrow v \text{ sao cho } \bar{x} + t_n v_n \in A \ \forall n \geq 1 \right\}.$$

Ở đây $t_n \rightarrow 0+$ thay cho một dãy số thực dương hội tụ về không.

Định nghĩa 2.7 ([8]) Nón tiếp liên phần trong của tập $A \subset X$ tại điểm $\bar{x} \in clA$ được định nghĩa bởi

$$IT(A, \bar{x}) = \left\{ v \in X : \exists \delta > 0 \text{ sao cho } \bar{x} + tv \in A \ \forall t \in (0, \delta], \forall v \in B(v, \delta) \right\}.$$

Ký hiệu (xem Luu [7])

$$\#T(A, \bar{x}) = \left\{ v \in X : \exists t_n \rightarrow 0+ \text{ sao cho } \bar{x} + t_n v \in A \ (\forall n : \infty) \right\}.$$

Ở đây $n : \infty$ ta hiểu là n là số tự nhiên đủ lớn.

Ta có bao hàm thức đúng sau:

$$IT(A, \bar{x}) \subset \#T(A, \bar{x}) \subset T(A, \bar{x}).$$

Để khép lại phần này, chúng tôi giới thiệu một đặc trưng tương đương cho nón tiếp liên do Giorgi và Guerraggio [8] cung cấp như sau:

Mệnh đề 2.1 ([8]) Nón tiếp liên của tập $A \subset X$ tại điểm $\bar{x} \in clA$ có dạng

$$T(A, \bar{x}) = \left\{ v \in X : \exists x_n \in A \setminus \{\bar{x}\}, x_n \rightarrow \bar{x} \text{ sao cho } \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{v}{\|v\|} \right\} \cup \{0\}.$$

Chú ý các ký hiệu được sử dụng trong các biểu thức bên trên hiểu như sau:

$$x_n \rightarrow \bar{x}, \text{ nghĩa là } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}, \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0,$$

và $\bigcup_{x \in K} F(x_0, x)$ thay cho $F(x_0, K)$.

3. KẾT QUẢ MỚI CỦA BÀI BÁO

Dựa vào khái niệm đạo hàm Studniarski trong không gian Banach và khái niệm nón tiếp liên, nón tiếp liên phần trong của tập tại điểm, trong tiểu mục này chúng tôi cung cấp một số điều kiện cần hữu hiệu dạng cơ bản và dạng đối ngẫu cho nghiệm hữu hiệu yếu và nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (GVEP) và áp dụng kết quả cho hai bài toán đặc biệt đó là (GVOP) và (GVVI).

Cho $\bar{x} \in K$ và $v \in X$. Ký hiệu

$$d_S F(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x}) \cap \{u \in X : d_S g(\bar{x}; u) \in -\text{int } S\}) \cap (-\text{int } Q) = \emptyset,$$

nghĩa là

$$d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v) \notin -\text{int } Q \quad \forall v \in T(C, \bar{x}) \cap \{u \in X : d_S g(\bar{x}; u) \in -\text{int } S\},$$

trong đó $d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ là đạo hàm Studniarski cấp 1 của hàm số $F(\bar{x}, \cdot) : X \rightarrow Y$ tại điểm $(\bar{x}, v)$ và được xác định bởi (xem Định nghĩa 2.5)

$$d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v) := d_S^1 F(\bar{x}, \bar{x}; v) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ u \rightarrow v}} \frac{F(\bar{x}, \bar{x} + tu) - F(\bar{x}, \bar{x})}{t}.$$

Một điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (GVEP) dạng cơ bản được phát biểu như sau.

Định lý 3.1 Cho $\bar{x} \in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F(\bar{x}, \bar{x}) = 0$. Giả sử rằng các đạo hàm Studniarski $d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ và $d_S g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\bar{x} \in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVEP) thì

$$d_S F(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x}) \cap \{u \in X : d_S g(\bar{x}; u) \in -\text{int } S\}) \cap (-\text{int } Q) = \emptyset.$$

Chứng minh. Giả sử rằng $\bar{x} \in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVEP). Khi đó tồn tại số thực dương $\delta > 0$ thỏa mãn

$$F(\bar{x}; K \cap B(\bar{x}, \delta)) \cap (-\text{int } Q) = \emptyset. \quad (2)$$

Ta chứng minh

Điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm yếu địa phương của bài toán cân bằng vector có ràng buộc bất đẳng thức...

$$d_S F(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x}) \cap \{u \in X : d_S g(\bar{x}; u) \in -\text{int } S\}) \cap (-\text{int } Q) = \emptyset. \quad (3)$$

Thật vậy, ngược lại với kết luận (3) ta có thể chọn một hướng $v \in T(C, \bar{x})$ sao cho

$$d_S g(\bar{x}; v) \in -\text{int } S \quad (4)$$

và

$$d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v) \in -\text{int } Q. \quad (5)$$

Để thấy $v \in T(C, \bar{x}) \setminus \{0\}$. Sử dụng Mệnh đề 2.1 ta có:

$$\exists x_n \in C \setminus \{\bar{x}\}, x_n \rightarrow \bar{x} \text{ khi } n \rightarrow +\infty$$

Sao cho

$$\frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{v}{\|v\|}. \quad (6)$$

Với mỗi số tự nhiên n , ta đặt

$$t_n = \frac{\|x_n - \bar{x}\|}{\|v\|},$$

$$v_n = \frac{x_n - \bar{x}}{t_n}.$$

Khi đó, do (6) ta được

$$t_n \rightarrow 0+ \text{ và } v_n \rightarrow v.$$

Hiển nhiên

$$x_n = \bar{x} + t_n v_n \in C \quad (\forall n \geq 1). \quad (7)$$

Theo định nghĩa đạo hàm Studiniarski (Định nghĩa 2.5), ta có

$$d_S g(\bar{x}; v) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ u \rightarrow v}} \frac{g(\bar{x} + t u) - g(\bar{x})}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(x_n) - g(\bar{x})}{t}, \quad (8)$$

và

$$d_S F(\bar{x}, \bar{x}; v) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0+ \\ u \rightarrow v}} \frac{F(\bar{x}, \bar{x} + t u) - F(\bar{x}, \bar{x})}{t} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(\bar{x}, x_n) - F(\bar{x}, \bar{x})}{t}.$$

Bởi vì $\text{int } S$ là tập mở nên kết hợp (4) và (8), tồn tại số thực dương $A > 0$ sao cho

$$\frac{g(x_n) - g(\bar{x})}{t} \in -\text{int } K \quad (\forall n \geq A).$$

Hay tương đương

$$g(\bar{x} + t_n v_n) \in -S \quad (\forall n \geq A), \quad (9)$$

bởi vì $x_n = \bar{x} + t_n v_n$ do (7) và vì nón S lồi, ta nhận được kết quả

$$g(\bar{x}) \in -S, \quad S + \text{int } S = \text{int } S \subset S$$

và với mọi số thực $t > 0$,

$$\frac{1}{t} \text{int } S = \text{int } S.$$

Để ý rằng $x_n \rightarrow \bar{x} \in B(\bar{x}, \delta)$ nên tồn tại số thực B với $B > A$ sao cho $x_n \in B(\bar{x}, \delta)$ và các quan hệ trong (7) và (9) đúng với mọi $n \geq B$. Kết hợp (7) và (9) cho ta kết quả sau

$$x_n = \bar{x} + t_n v_n \in K \cap B(\bar{x}, \delta) \quad (\forall n \geq B). \quad (10)$$

Một cách tương tự như các bước như trên ta cũng có

$$F(\bar{x}, \bar{x} + t_n v_n) \in -\text{int } Q \quad (\forall n \geq C), \quad (11)$$

ở đây C là số dương lớn hơn B được chọn trong quá trình xử lý kết quả. Do đó (10) cũng đúng với mọi $n > C$. Điều này cùng với (11) dẫn đến một sự mâu thuẫn với điều kiện (1) (xem Định nghĩa 2.2) được thiết lập bên trên. Vậy, điều kiện trong (3) được thỏa mãn và định lý được chứng minh đầy đủ.

Một hệ quả trực tiếp từ Định lý 3.1 là kết quả sau.

Hệ quả 3.1 Cho $\bar{x} \in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F(\bar{x}, \bar{x}) = 0$. Giả sử rằng các đạo hàm Studniarski $d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ và $d_s g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\bar{x} \in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vector với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVEP) thì

$$d_s F(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x}) \cap \{u \in X : d_s g(\bar{x}; u) \in -\text{int } S\}) \cap (-\text{int } Q) = \emptyset.$$

Chứng minh. Bởi vì một nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (GVEP) cũng là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán đó (nhận xét trong Định nghĩa 2.2). Áp dụng Định lý 3.1 ta kết luận.

Một điều kiện hữu hiệu được phát biểu ở dạng đối ngẫu cho nghiệm hữu hiệu yếu (địa phương) của bài toán (GVEP) dựa theo Định lý 3.1 và Hệ quả 3.1 như sau.

Điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc bất đẳng thức...

Định lí 3.2 Cho $\bar{x} \in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F(\bar{x}, \bar{x}) = 0$. Giả sử rằng các đạo hàm Studniarski $d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ và $d_s g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\bar{x} \in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu (hay nghiệm hữu hiệu yếu địa phương) của bài toán cân bằng vectơ với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVEP) thì với mọi $v \in T(C, \bar{x})$ sao cho $d_s g(\bar{x}, v) \in -\text{int } S$, tồn tại $f \in Q^+ \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$f(d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)) \geq 0. \quad (12)$$

Chứng minh. Sử dụng Định lí 3.1 kết hợp với Hệ quả 3.1 ta có

$$d_s F(\bar{x}, \bar{x}; T(C, \bar{x}) \cap \{u \in X : d_s g(\bar{x}; u) \in -\text{int } S\}) \cap (-\text{int } Q) = \emptyset.$$

Do đó, với tùy ý $v \in T(C, \bar{x})$ sao cho $d_s g(\bar{x}, v) \in -\text{int } S$, ta có

$$d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v) \notin -\text{int } Q.$$

Áp dụng một định lí tách trong Rockafellar [9], tồn tại $f \in Y^* \setminus \{0\}$ sao cho

$$f(d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)) > f(q) \quad \forall q \in -\text{int } Q.$$

Do đó,

$$f(d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)) \geq f(q) \quad \forall q \in -Q. \quad (13)$$

Bởi vì nón Q chứa 0 nên bất đẳng thức (12) đúng. Để kiểm tra $f \in Q^+$ ta chứng minh

$$f(q) \geq 0 \quad \forall q \in Q. \quad (14)$$

Thật vậy, với mọi số dương t , ta có $tq \in Q$ khi $q \in Q$, nên áp dụng (13) và chuyển biểu thức ở vế phải sang vế trái, ta nhận được

$$f(d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)) + f(tq) \geq 0 \quad \forall q \in Q, \forall t > 0,$$

hay tương đương

$$\frac{1}{t} f(d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)) + f(q) \geq 0 \quad \forall q \in Q, \forall t > 0. \quad (15)$$

Cho $t \rightarrow +\infty$ trong (15) và ta nhận được bất đẳng thức trong (14). Vậy định lí được chứng minh đầy đủ.

Tiếp theo chúng tôi cung cấp một số ứng dụng của Định lí 3.2 cho các bài toán (GVOP) và (GVVI).

Định lý 3.3 Cho $\bar{x} \in K$ và giả sử $F(x, y) = f(y) - f(x) \quad \forall x, y \in K$ với $f : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ. Giả sử thêm rằng các đạo hàm Studniarski $d_s f(\bar{x}; v)$ và $d_s g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\bar{x} \in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu (hay nghiệm hữu hiệu yếu địa phương) của bài toán tối ưu vectơ với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVOP) thì với mọi $v \in T(C, \bar{x})$ sao cho $d_s g(\bar{x}, v) \in -\text{int } S$, tồn tại $f \in Q^+ \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$f(d_s f(\bar{x}; v)) \geq 0. \quad (16)$$

Chứng minh. Xét song hàm $F : K \times K \rightarrow Y$ được định nghĩa bởi

$$F(x, y) = f(y) - f(x) \quad \forall x, y \in K.$$

Khi đó với mỗi $\bar{x} \in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ và hơn nữa,

$$F(\bar{x}, x) = f(x) - f(\bar{x}) \quad \forall x \in K.$$

Do vậy, đạo hàm Studniarski $d_s f(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$ khi và chỉ khi đạo hàm Studniarski $d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Ngoài ra đẳng thức sau dễ dàng kiểm tra thỏa mãn $d_s f(\bar{x}; v) = d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ với mọi $v \in X$. Áp dụng Định lý 3.2, tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in Q^+ \setminus \{0\}$ thỏa mãn bất đẳng thức trong (16) và điều khẳng định này kết thúc chứng minh.

Định lý 3.4 Cho $\bar{x} \in K$ và giả sử $F(x, y) = \langle Tx, y - x \rangle \quad \forall x, y \in K$ với ánh xạ $T : K \rightarrow L(X, Y)$. Giả sử thêm rằng đạo hàm Studniarski $d_s g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\bar{x} \in K$ là một nghiệm hữu hiệu yếu (hay nghiệm hữu hiệu yếu địa phương) của bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ với ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVVI) thì với mọi $v \in T(C, \bar{x})$ sao cho $d_s g(\bar{x}, v) \in -\text{int } S$, tồn tại $f \in Q^+ \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$f(T\bar{x}(v)) \geq 0. \quad (17)$$

Chứng minh. Xét song hàm $F : K \times K \rightarrow Y$ được định nghĩa bởi

$$F(x, y) = \langle Tx, y - x \rangle \quad \forall x, y \in K.$$

Lúc này với mọi $\bar{x} \in K$ thỏa mãn điều kiện cân bằng $F(\bar{x}, \bar{x}) = 0$ và ngoài ra,

$$F(\bar{x}, x) = \langle T\bar{x}, x - \bar{x} \rangle \quad \forall x \in K.$$

Do vậy, đạo hàm Studniarski $d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)$ luôn tồn tại theo mọi phương $v \in X$ và

Điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm yếu địa phương của bài toán cân bằng vector có ràng buộc bất đẳng thức...

$$T_{\bar{x}}(v) = d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v) \text{ với mọi } v \in X.$$

Theo Định lí 3.2, tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $f \in Q^+ \setminus \{0\}$ thỏa mãn bất đẳng thức trong (17) và chúng ta kết thúc chứng minh định lí.

Chú ý 3.1 Kết quả thu được của Định lí 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 và Hệ quả 3.1 vẫn còn đúng trong trường hợp nón tiếp liên $T(C, \bar{x})$ bị hủy bỏ và chúng được thay thế bởi nón tiếp liên phần trong $IT(C, \bar{x})$ hay $\mathcal{H}(C, \bar{x})$. Cuối cùng chúng tôi cung cấp một ví dụ số để mô tả cho Định lí 3.2 trong trường hợp nghiệm hữu hiệu yếu địa phương như sau.

Ví dụ 3.1 Xét bài toán cân bằng vector có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát (GVEP), trong đó $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2$, $Z = \mathbb{R}$, $C = [-1, 1]$, $Q = \mathbb{R}_+^2$, $S = \mathbb{R}_+$ và $\bar{x} = 0$. Các ánh xạ $F(\bar{x}, \cdot): X \rightarrow \mathbb{R}^2$ và $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ được định nghĩa tương ứng bởi

$$F(\bar{x}, x) = \begin{cases} \left(x \sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right), \frac{x - \sin x}{x^2} \right) & \text{khi } x \neq 0 \\ (0, 0) & \text{khi } x = 0 \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

$$g(x) = \begin{cases} \left(x - \tan x + (x^2 - |x|) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) \frac{1}{\sin x} & \text{khi } x \neq \frac{k\pi}{2} \\ 0 & \text{khi } x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Tập chấp nhận được của bài toán (GVEP) là $K = [-1, 1]$. Với mỗi $x \in K \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Suy ra hàm số $y = x \sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right) \geq 0$ trên đoạn $\left[-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right] \subset [-1, 1]$ và hệ quả là $F(\bar{x}, x) \notin -\text{int } Q$ với mọi $x \in K \cap \left[-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right]$. Do đó, vector $\bar{x} = 0$ là một nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán (GVEP). Mặt khác, với mọi $v \in \mathbb{R}$, bằng tính toán trực tiếp ta được $d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v) = \left(0, \frac{v}{6}\right)$ và $d_s g(\bar{x}; v) = -\frac{|v|\pi}{2}$. Do đó tất cả các giả thiết của Định lí 3.2 được thỏa mãn. Để ý rằng các đẳng thức đúng: $T(C, \bar{x}) = \mathbb{R}$ và $-\text{int } S = (-\infty, 0)$. Theo Định lí 3.2, với mọi $v \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $d_s g(\bar{x}; v) = -\frac{|v|\pi}{2} < 0$, hay tương đương $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vậy tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $f = (f_1, f_2) \in \mathbb{R}_+^2$ với $(f_1, f_2) \neq (0, 0)$ sao cho $f(d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)) \geq 0$. Thật vậy, bằng phương pháp thử trực tiếp, ta chọn hai số thực $f_1 > 0$, $f_2 = 0$ thì

$(f_1, f_2) \neq (0, 0)$ và hơn nữa $f\left(d_s F(\bar{x}, \bar{x}; v)\right) = 0$. Do đó, kết quả của Định lí 3.2 được kiểm tra đầy đủ.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã chứng minh được kết quả về điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu yếu và nghiệm hữu hiệu yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát và hai trường hợp đặc biệt của bài toán đó là bài toán tối ưu vectơ và bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ với cùng ràng buộc theo ngôn ngữ của đạo hàm Studniarski với lớp hàm không trơn trong không gian Banach. Kết quả đạt được là hoàn toàn mới và được sử dụng cho việc nghiên cứu tính ổn định nghiệm của bài toán cân bằng tham số và dùng trong việc thiết kế thuật toán số tìm nghiệm hữu hiệu yếu địa phương cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc bất đẳng thức tổng quát trong tương lai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. X. H. Gong (2008), Optimality conditions for vector equilibrium problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 342, pp. 1455-1466.
- [2]. X. J. Long, Y. Q. Huang, Z. Y. Peng (2011), Optimality conditions for the Henig efficient solution of vector equilibrium problems with constraints, *Optim. Lett.*, 5, pp. 717-728.
- [3]. E. Blum, W. Oettli (1994), From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Math. Stud.*, 63, pp. 127-149.
- [4]. M. Bianchi, N. Hadjisavvas, S. Schaible (1997), Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions, *J. Optim. Theory Appl.*, 92, pp. 527-542.
- [5]. Q.H. Ansari (2000), Vector Equilibrium Problems and Vector Variational Inequalities, in *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria Mathematical Theories*, Edited by Prof. F. Giannessi, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, pp. 1-16.
- [6]. M. Studniarski (1986), Necessary and sufficient conditions for isolated local minima of nonsmooth functions, *SIAM J. optim.*, 24, pp. 1044-1049.
- [7]. D. V. Luu (2008), Higher-order necessary and sufficient conditions for strict local Pareto minima in terms of Studniarski's derivatives, *Optim.*, 57, pp. 593-605.
- [8]. G. Giorgi, A. Guerraggio (1992), On the notion of tangent cone in mathematical programming, *Optim.*, 25, pp. 11-23.
- [9]. R.T. Rockafellar (1970), *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton.
- [10]. Tran Van Su, Nguyen Thanh Phong (2018), Điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu toàn cục của bài toán cân bằng vectơ và áp dụng, *TCKH Trường Đại học Quảng Nam*, 13, 62-72.

Điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm yếu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc bất đẳng thức...

NECESSARY EFFICIENCY CONDITIONS FOR THE LOCAL WEAKLY EFFICIENT SOLUTIONS OF VECTOR EQUILIBRIUM PROBLEMS WITH GENERAL INEQUALITY CONSTRAINTS AND APPLICATIONS

Tran Van Su, Nguyen Thanh Phong

Faculty of Mathematics, Quang Nam University

Email: vansudhdntt@gmail.com, phongspqn@gmail.com

ABSTRACT

Making use of the concept of Studniarski's derivatives in Banach spaces in this article, we study the necessary efficiency conditions for local weakly efficient solutions of vector equilibrium problems with general inequality constraints. These obtained results are directly applied to the vector variational inequality problems and the vector optimization problem with common general inequality constraints.

Keywords: Local weakly efficient solutions, Necessary efficiency conditions, Studniarski's derivatives, Vector equilibrium problems, Vector optimization problems, Vector variational inequality problems.



Trần Văn Sự sinh ngày 28/4/1983 tại Quảng Nam. Năm 2005, ông nhận bằng cử nhân Sư phạm Toán tin tại trường Đại học Sư phạm Đà Nẵng. Năm 2009, ông nhận bằng thạc sĩ Toán Giải tích tại trường Đại học Khoa học-Đại học Huế. Năm 2018, ông nhận bằng tiến sĩ Toán học chuyên ngành Toán ứng dụng tại Học viện Khoa học và Công nghệ - Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam. Năm 2009 đến nay, ông là Giảng viên khoa Toán trường Đại học Quảng Nam.

Lĩnh vực nghiên cứu: Toán ứng dụng, lý thuyết đối ngẫu và điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ.